CONSIDERATIO NOVA IN OPUSCULUM ARCHIMEDIS DE CIRCULI DIMENSIONE: VBI 1. CALCULUS...

Thomas Gephyrander

Digitized by Google

ILLUSTRISSIMIS ET FELICISSIMIS, BELGICAE FOEDERATAE AC LIBERAE ORDINIBUS,

Reipublicae, virtutis, literarum, ingeniorumque patronis serenissimis, Dominis suis observantia summa colendis.

Quam salutare sit in Magistratu praestante sapientem [illegible], Illustrissimi DD. Ordd. Praeter experientiam quotidianam [illegible] divina [illegible] testimonia [illegible]. Eorum principes [illegible] & [illegible] Plato dum beatas fore [illegible] possit: si aut docti aut sapientes homines eas regere coepissent, aut qui regerent, omne suum studium in doctrina & sapientia collocassent. Hanc sententiam vere auream & salutarem, [illegible] Cicero, [illegible] in rep. [illegible], [illegible] doctrinaque [illegible] Quinto fratri suo charissimo Asiam [illegible] Praetoria obtinenti inculcandam iudicarit. Neque dubium [illegible] est, quin huius quoque Platonicae [illegible] celebratae [illegible] Macedonum rex Philippus, ut non [illegible] nomine [illegible], quod filium Alexander, qui postea Magnus [illegible] Aristotele [illegible] Praeceptori [illegible]. [illegible] Cum vero adolescens Salomon [illegible] sapientiam praeferret, [illegible] quae de re ipsa [illegible] Scriptura [illegible] praestabit

En

Eo quod petiisti rem istam (ait Iehoua) & non petiisti tibi dies multos; neq; petiisti tibi diuitias, neq; petiisti vitam inimicorum tuorum, sed petiisti tibi discretionem ad intelligendum iudicium: Ecce facio secundum sermonem tuum: Ecce do tibi animum sapientem & intelligentem, adeo ut par non fuerit tibi ante te, & post te non surrecturus sit par tibi. Insuper etiam quod non petiisti, do tibi, tum diuitias, tum gloriam, adeo ut non sit par tibi ullus inter reges omnibus diebus tuis. Hactenus scriptura: quæ tamen hic nondum subsistit, sed copiosissime [illegible] persequitur, quam cumulate Deus has suas promissiones impleuerit. Huius historiæ apud vos Ord. ampliss. vel ideo libenter memini, quod in vestra quoq; rep. pleraq; non dissimilia Dei beneficia [illegible] videam. Religionem veram diuinamq; (quæ longe potior pars est sapientiæ omnibus expetendæ) magno amore studioq; inde ab initio complexi estis, adeo ut persecutiones crudelissimas, bellaq; [illegible] exemplo grauissima adire quam ab ea dimoueri maluerítis. Studia doctrinarum tanti fecistis, ut vel ipso [illegible] tempore (quo plerique literas negligunt, [illegible] sumptibus impendunt) Academiam illustremq; [illegible] sumptibus immensis, tanquam sedem atq; fontem omnis literaturæ, [illegible] atq; exornare non destiteritis. Quid igitur [illegible] diuina misericordia (Dei enim filium miserationes cantamus, dum hæc repetimus) quid inquam, tandem consecuti? Optimam Ecclesiæ Reiq; constitutionem, miram omnium rerum in omnes vsus abundantiam, [illegible] ipso hoc vitali spiritu pretiosiorem, summam per omnes ordines felicitatem, pietatem denique, inter ipsos quoq; antipodes dilatatam. Singula minutim persequi, adulationis [illegible] suspicio. Deum precamur, ut quæcunq; in vos pro sua misericordia dona contulit, ea [illegible] dies vobis non tantum [illegible], sed etiam salutaria, [illegible] ipsius prædicandæ laudis calcar addens. Illud vero vnum, quod ad institutum nostrum quam proxime pertinet, silentio non prætereundum. Mathematica, quæ alibi sola sibi [illegible] Philosophi ab omni politico vsu remota possident, ita esse in vestro imperio familiaria, ut non solum principes viri, ac magnates fere omnes, sed etiam [illegible] permulti, negociatores, opifices, nautæ, ac [illegible] [illegible] stionibus non sine quodam acumine sententiam suam proferre possint.

Imprimis autem illustrissimum illud totius Mathesios theorema de circulo quadrando adeo celebre ac pene vulgare est, ut quibusdam

hoc

fatis, (quod valde miratus sum) etiam ad mulierculorum aures de-scenderit. Causam mihi hujus rei suspicanti tres sunt a diversis ali-bus quaerendae. Prima quod magnus ille (nunc piae memoriae) Iosephus Scaliger etiam ipsum Cyclometriae signum [illegible], in quo inventis suis demonstrationes absurdas exprimeretur. Altera, quod vero circuli tetra-gonismo reperto, aliquid lucis tum ad tabulas Geographicas accura-tius perficiendas, tum ad navigationes Indicas per Oceanum [illegible] dirigendas (quod tamen quomodo fieri possit equidem fateor me non intelligere) succedere posse persuasum esset. Tertia, quod ipsa controversia hujus rei omnia, sua quadam luce gentem ad excellen-tia quaeq; in omnibus artibus aspirantem excitatio quodam genere per-trahere atq; allicere. Et certe quod de praestantia affertur, nullo modo negari potest, si quis [illegible], quod nationum ingenia, quae quantaq; [illegible] hac, sed fructu quidem, [illegible], re ordinatur. Neq; desunt magnorum virorum in hanc rem testimo-nia, [illegible] quibus unum atq; alterum proponemus. Regio-montanus [illegible] fuerit Mathematicum ingenium [illegible] incitamento habeatur.

Dicit P. Ramus lib. 2. proœmii Mathematici inter laudes illius sic ait: Norimberga cum Regiomontano fere fuerat: Mathematici inde & studii & operis gloriam tantam adepta, ut Tarentum Archyta, Sy-racusae Archimede, Byzantium Proclo, Alexandria Ctesibio, non ma-gis, quam Norimberga Regiomontano gloriari possit. Edidit cer-torum annorum Ephemerides, quo uno omnium Mathema-ticorum totius mundi ora in se converterit. At de circuli Tetragonis-mo in epistola quadam anno 1464 Venetiis data, sic inquit: Spes no-tis circulum quadrandi ademta. Et paulo post: Quamvis plurimi qui-dem acutissimi philosophi id aggressi sint, nemo Archimedem in hoc philosophandi genere usq; ad hodiernum diem superavit. Admirandus profecto esset, qui tantum tamq; inexplicabile [illegible] & nodi absolve-rit, alicuiusq; in alterum commutandi facultatem traderet. Is e-nim majores nostros universo ingenio suo, praesertim in Geometricis ex-ercitiis, longe antecessisse crederetur. Hactenus Regiomontanus plus satis quidem hyperbolice.

Ioannes autem Buteo lib. 1. de Quadrat. circ. in hunc modum: Quid putamus? quam acri contentione Geometrarum olim tunc, cum urgebant animis, actum sit in ea investigatione (circuli quadrandi) la-

boratum, ut vel hac sola difficultate vincerentur, & inventionis tam reconditæ palmam reportarent? Hæc ille. Nos vero (qui fere nimis ab hac exercitia transimus, nec ullo modo [illegible] conferri vel cupimus, vel possumus, qui hujus artis mysteriis penitius imbuti, Geometrarum nomen iure sibi vindicant) cum divina dicente gratia hujus quæstionis lineamenta quædam, sine tamen demonstrationibus [illegible] duxissemus, [illegible] ipsis [illegible] in posterum explicandis & defendendis [illegible] esse, atq; si aliorum, maxime Archimedis demonstrationes objicerentur, his nihil aliud, quam nostras (quæ numero & perspicuitate præcederent) regerere, plane constitueramus. Interea cum Archimedea fundamenta accuratius iterandum considerantes, nonnihil in sis (nostro quidem judicio) erroris sese proderet, putaremq; [illegible] & perniciosum veritati præjudicium tandem abolere posset: [illegible] equidem has considerationes non tantum pro nostro modulo in chartas conjicere, sed etiam publici juris facere, vestroq; illustrissimo nomini inscribere, idq; non sine consilio deliberato. Caussa enim, quam examine præjudicio per tot secula jam sancita est, ut nisi ad tribunal æquitate, sapientia, auctoritate [illegible] pertrahatur, [illegible] eventum extimescamus. Inter multa (ait Joannes Buteo) quæ princeps ille Geometra, artis ingeniiq; bonis suspiciendus Archimedes, doctrinæ suæ monumenta reliquit, præcipuum locum tenet circuli dimensio, opus sane ipsa difficultate famosum. Item, Cum ex aliis subtiliter inventis, tum ex hoc maxime dimensionis opusculo apud doctos & antiquos omnes [illegible] simul & ingenii nomen Archimedes obtinuit. Quin & ipse Archimedes, quanti hanc suam demonstrationem fecerit, non obscure indic[illegible]vit, cum sphæram & cylindrum (quorum dimensio ex circuli dimensione [illegible]pendet) sepulchro suo inscribi voluit, adeo ut qui [illegible] tandem [illegible] sepulchrum illud a fundamentis [illegible] mille annos, [illegible] memoriam gloria [illegible] videatur. Talia alia id generis multa [illegible] acquiescentes [illegible] [illegible] probe mihi sum conscius [illegible] Archimento fuisse [illegible] [illegible] detrahere vel [illegible] vel posse (quod [illegible] auctoritati [illegible] detrahat [illegible] vel quæ [illegible] [illegible] bonitatem [illegible]) [illegible] & [illegible] veritati vel optime [illegible], [illegible] demonstrationem.

Verum

Præstantissimi Viri clariss. [illegible] Dn. Dn. [illegible] æquitatem sapientiamque, [illegible] perspectam [illegible]: vestra quoque multis modis sæpe [illegible] [illegible] gratiamque [illegible]. Quod si certè (homo enim sum, ut nostis omnes) id jam consequutus non essem, nihilo tamen quibus vobis displicebunt (quis enim [illegible] abnuerit, omnibus placere potis?) argumentum nihil vobis præiudicent, antequam responderemque, nostra plenè audiatur, [illegible] res ipsa loquatur. Deo visum esse [illegible] quidem quocunque, [illegible] autem serenissimis auspicijs [illegible]. Mathematicas [illegible] lumina tenebras dispellere, solemque quem tam diu per [illegible] Mathematicus desideratum tandem aliquando propius ostendere: ne quasi [illegible] sublimis [illegible] humanitatemque vestram [illegible] aliquam [illegible] necessariò [illegible]. [illegible] sapientia [illegible] vestra [illegible] Deo vestro auspiciis [illegible] ad summum pervenire. [illegible] vel mater quondam patria (magnorum [illegible] judicio) est Mathesis: quam ut hactenus Archimedis amissa sui [illegible] quidem, sed certè [illegible], [illegible] adhuc claudicantem, ardenter osculari ipsis: ita jam [illegible] sub nomine vestrûque auspiciis sanitati restitutam videbitis, facit [illegible] heroica illa vestra erga Musarum studia indole, ut multo nunc [illegible] osculari videamini. Erit hoc [illegible] judicioque vestro, non tantum ipsis Mathematicum disciplinis salutare, ac in [illegible] [illegible] studiis penè necessarium, sed etiam rebus vestris, [illegible] maximèque felicissimè gestis, ad totam Mathematicæ posteritatis [illegible], ornamento singulari. Deus Opt. Max. sancto suo spiritu [illegible] [illegible] illam suam erga vos misericordiam, ad nominis sui salutarem nobis gloriam vestrique imperii constantiam, semper excitare & augere dignetur. Unnæ Anno 1609.

Thomas Gephyrander Salicetus,
civis Unnensis, Marca-Westphalus.

Epigramma ad eosdem illustriss. DD. Ordd.

BElgia praeillustris foederali foedere juncta,
Inclyta terrifici Neptuni & filia Martis,
Nobile, totius miraculum & gloria mundi.
En tibi, dum partu pro libertatem [illegible],
Aspice, ac laetus reperti pomposa triumphos.
Ipse Syracusius hic multis [illegible] ab annis
Cyclometra inter longe fortissimus Hercles,
Omine felici, Musisq; & Apolline digne;
Arma tibi ponit magni sub nominis astro,
Arma cyclometrica quibus [illegible] in arte,
Nomina & imperia magna tot regna, tot urbes,
Antipodesq; ipse tenuit cum climate nostro.
Hic ille est, cujus miracula plena mathesi,
Edita jactantur, quibus ipse exercitus olim.
Rex Hiero exclamat; nil [illegible] magistro,
Cunctandū assensu, quem tanta scientia cinget.
Hic ille est, cujus vox magna, [illegible]
Da ubi consistam; sic ingenio [illegible] terram.
Ponderibus libram [illegible] in altum,
Dux quoq; Romanus dum moenia [illegible] urget,
Hic quibus inclusus [illegible]
Arma, videt toto trepidantem gurgite classem;
Navibus (infandum) [illegible] in sublime volatis.
Nunc iterū immani [illegible] pulsantibus undas,
Tantus in armis erat, qui [illegible] arma.
Tu vero in toto gens illustrissima mundo,
Clara Mathematicis [illegible] caerula pennis,
Clara Mathematica [illegible] Martē,
Clarior at Christi pro religione triumphans,
Haec Italia illustris Siculis [illegible] Mathesi,
Illuxit Batavo [illegible] optima favore.
Illustrare tuo [illegible] nepotes;
Auspicio [illegible] gloria copertat omnis,
Non tibi Neptunus, non Martē applaudere [illegible].
Sed Musis etiam [illegible] ad [illegible],
Usq; tuo saeclo populisq; [illegible],
Caetera quae mūdi [illegible] barbara climata [illegible].

Idem qui ante.

Thom. Gephyr. Sal.

Digitized by Google

CONSIDERATIO NOVA IN OPUSCULUM ARCHIMEDIS DE CIRCULI DIMENSIONE.

OPusculum Archimedis de Circuli dimensione, quod nunc considerandum suscepimus, brevissimum pariter & acutissimum est, tres tantum propositiones seu theoremata cum suis demonstrationibus complectitur. Ex iis sufficere nobis ad propositum nostrum arbitramur, duas priores propositiones simpliciter atq; nude exscribendo hic præmittere, tertiam vero cum sua demonstratione, saltem ex parte priore (qua de præcipue consideratio nostra tractabit) plenius repetere. Sic enim fieri posse judicamus, ut non tantum argumentum susceptionis nostræ ante omnia satis intelligant etiam ii, qui Archimedis scripta (quæ paucorum in manibus versantur) non habent; verum etiam qui habent repetitione tam brevi atq; præcisa non offendantur.

ARCHIMEDIS DIMENSIO CIRCULI Ioanne Buteone interprete.

PROPOSITIO SEU THEOREMA primum.

Omnis circulus æqualis est trigono orthogonio, cuius quæ quidem ex centro linea æqualis uni eorum laterum, quæ circa rectum angulum, perimeter autem basi.

PROPOSITIO SEU THEOREMA secundum.

Circulus ad id quod ex dimetiente quadratum, rationem habet quam undecim ad quatuordecim.

Digitized by Google

PROPOS. SEU THEOR. TERTIA.

Omnis circuli perimetros tripla est diametri, & adhuc excedit minori quidem, quam septima parte diametri, majori autem quam decem septuagesima prima.

DEMONSTRATIO PRIORIS PARTIS

quæ perimetros circuli minor sit tripla sesquiseptima diametri.

Esto circulus A. G. & ipsorum E. & G. L. Z. linea contingens circulum, & qui sub Z. E. G. angulus tertia pars recti. Ipse igitur E. Z. ad Z. G. rationem habet, quam 306. ad 153. Ipsa autem E. G. ad G. Z. rationem habet, quam 265. ad 153. Itaq; bifariam secetur æqualiter, qui sub Z. E. G. angulus ducta linea H. E.



1. Est igitur sicut Z. E. ad E. G. ita Z. H. ad H. G. Et permutatim, & componendo, sicut utraq; simul Z. E. & E. G. ad Z. G. ita E. G. ad G. H. Quare ipsa G. E. ad G. H. majorem rationem habet, quam 571. ad 153. Ipse igitur E. H. ad H. G. potentia majorem rationem habet, quam 326281. ad 23409. longitudine autem, quam 571. ad 153.

2. Rursus bifariam secetur æqualiter angulus, qui sub H. E. G. ducta E. Q. per eadem igitur ipsa E. G. ad G. Q. majorem rationem habet, quam $153\frac{1}{2}$ ad 153. Ipse igitur Q. E. ad Q. G. majorem rationem habet $\frac{1}{2}$ quam 571. ad 153.

Rursus

3. *Rursus bifariam secetur aequaliter angulus, qui sub O E G, ducta E C. Ipsa igitur E G ad G C maiorem rationem habet, quam 2334¼ ad 153. Ipsa E C igitur ad G C maiorem rationem habet, quam 2339¼ ad 153.*

4. *Rursus bipartiatur aequaliter angulus qui sub C E G, ducta E L. Ipsa igitur E G ad L G majorem rationem habet, quam 4673½ ad 153. Quoniam igitur, qui sub Z E G angulus, cum sit tertia pars recti, quater bipartitus est, is qui sub L E G recti pars est quadragesima octava. Ponatur itaque angulo qui ad E aequalis, qui sub G E M. Ipse igitur angulus, qui sub L E M recti pars est vigesima quarta. Quare & ipsa linea recta L M est latus descripti circa circulum polygoni habentis 96. Quoniam igitur ipsa E G ad G L demonstrata est rationem habere majorem, quam 4673½ ad 153. Sed ipsius quidem E G dupla est A G, ipsius vero L G dupla est L M. Et ipsa igitur A G ad polygoni 96 laterum perimetrum majorem rationem habet, quam 4673½ ad 14688. Et est tripla, & excedit in 667½, quae quidem minora sunt, quam pars septima ipsorum 4673½. Itaque polygonum, quod circa circulum circumscribitur, ipsius diametri triplum est, & parte minori, quam septima parte majus. Ipsa igitur circuli perimeter multo magis minor est, quam tripla, & septima parte maior. Hactenus Archimedes.*

CONSIDERATIO PRAECEDENTIUM.

Theorema Archimedis primum non impugnamus, sed constanter recipimus; quamvis ex Geometria practica Christophori Clavii intelligamus, a Iosepho Scaligero Archimedem hoc loco falsitatis argui.

Theorema secundum a tertio dependet, (quod & Clavius dicto loco observavit) Quare si de tertio prius constiterit, de secundo facile transigetur.

In tertio autem tandem nequaquam nobis cum Archimede convenit, quod legitime demonstraverit proportionem inter circuli perimetrum & diametrum tripla sesquiseptima esse minorem; quia potius designato esse majorem calculus semper constanter evincet.

Sic

Sic autem calculum suum instituit Archimedes, ut quoties post radicum extractionem minutiæ seu fractiones supersunt, sive ancipiti radice, sive adhærent, eadem multiplicationis suffitibus ambitaq; involvat. Exemplum hujus rei ex bisectione alicui semicircularis circa circulum descripti sumamus, ubi suo more breviter sic ait: Rursus bipartiatur æqualiter angulus qui sub H E G ducta E Q, per eadem igitur ipsa E G. ad G Q majorem rationem habet, quam $1162\frac{1}{8}$ ad 153. Ipsa igitur Q E. ad Q G majorem rationem habet, quam $1172\frac{1}{8}$ ad 153. Hæc verba recitata hunc sensum plenius explicatum inferunt: Esse per additionem Arithmeticam in unam summam colligenda latera H E. & G E. quorum illud fuit $591\frac{1}{8}$, hoc 571. unde emergunt $1162\frac{1}{8}$. Qui numerus per seipsum multiplicatus quadratum producit $1350534\frac{33}{64}$ cui si addatur quadratum radicis 153 nempe 23409. summa erit $1373943\frac{33}{64}$ cujus radix est $1172\frac{359}{2345}$ nempe, paulo major quàm $1172\frac{1}{8}$. Hunc esse sensum Archimedis omnes interpretes consentiunt, quem ipsa radix $1172\frac{1}{8}$ ab Archimede expressa, testatur, ad quam nullo alio modo pervenitur unquam.

Intelligimus igitur tum ab Archimede ipso, tum ab omnibus illius interpretibus radici $1162\frac{1}{8}$ per multiplicationis viam quadratum ascribi $1350534\frac{33}{64}$. Imo generalis & usitata hæc est omnibus Geometris operandi ratio, ut si proposita radicis non fracta, quàm integra, quadratum in numeris constitui oporteat, id sine discrimine per Arithmeticam multiplicationem conficiant. Quæ jure quantopere peccetur, nunc demonstrare conabimur.

DISTINCTIO FRACTIO- *num radicalium.*

QUoniam sola diversarum rationum confusio errorem hunc tum peperisse, tum conservasse, & jam aliquot millenos annos texisse videtur, melius equidem pro veritate asserenda remedium non adhibebitur, quàm si confusa discernantur, discretisq; utrisq; sua cuiq; vera atq; distincta operandi ratio tribuatur.

Sciendum igitur fractiones seu minutias radicales omnes, eandem qua-

publicum [illegible] cosmographicum [illegible], non tamen sine magna homonymia admitteret, ideóq; et ipsa sit duplex, quarum alia distinctionis ergo Arithmetica, alia Geometrica appellatur.

Arithmeticæ ex simplici & Arithmetica radicis dimensione profluunt: Geometricæ contra ex Geometrica areæ ad radicem suam proportione seu reductione, quam radicum extractionem nominamus, suppetunt.

At illæ quidem per viam Arithmeticæ multiplicationis veram areæ potentiam attingunt: hæ multiplicatæ semper a scopo aberrant.

Illæ longitudinem vel partem longitudinis in radice: hæ magnitudinem areæ seu partem magnitudinis in area indicant: atq; ideirco illæ sunt radices, seu partes radicum [illegible], hæ potentiales.

Illæ sunt radices vel partes radicis tam inter se quam cum mensura integra, cui subsunt, symmetræ: hæ non sunt (proprie & vere loquendo) radices, nec partes radicis; sed radicibus habent ubiq; asymmetras.

Quamobrem & illæ semper partibus procedunt in radice æqualibus, in area vero inæqualibus: Hæ contra, partibus quidem in area quidem æqualibus, in radice verò inæqualibus.

Illæ sunt radices seu pars radicis numero explicabilis: hæ radices suppeditant numero surdas, nisi quatenus interdum casu & per accidens in Arithmeticas recidunt ac mutantur, & sic numero exprimi possunt: quo casu communionem in arithmeticas degenerant. Denique illarum radices simul & numeris & lineis prosequi: harum solo linearum artificio Geometrico assignari possunt.

Tot igitur modis, & fortasse etiam pluribus, cum dictæ fractiones differant, vehementer absurdum, & a veritate alienum est, utrasq; simul ad unam eandemq; rationem seu speciem Arithmeticam revocare; unde nihil aliud calculus evadere potest, quam si diversarum valorum nummismata sub una quadam specie confundas, ut de valore integri summa judicium facias.

DEMONSTRATIO QVOD FRACTIONES Geometricæ non sint multiplicandæ, ab exemplorum omnium inductione & evidentia.

PRoposita sit area quadrata, ad cujus lineam lateralem seu radicalem adhibita mensura pedali, reperio longitudinem lateris non

esse æqualem ipsi mensuræ adhibitæ, sed tantum illius semisse, autem sc. $\frac{1}{2}$ more consueto notamus. Hæc fractio quia simplex sit Arithmetica lateris dimensione hoc tantum potentia oritur, Arithmetica dicatur, quæ & ducta in se ipsam, quantitatem totius areæ aperit, nimirum $\frac{1}{4}$ hoc est, quartam pedis partem, qui numerus est ex radice $\frac{1}{2}$ quadrati.

Iterum proposita sit areola alia constans semipede, cujus latus ut est ad mensuram pedalem asymmetrum, in ideam simplici & Arithmetica discretione nusquam respondet. Geometrica autem artificio tandem invenio esse pedis quadrati semidiagonium: unde assequor aream ipsam continere (ut diximus) pedis semissem. Hæc fractio notatur eodem plane modo quo superiori illa notatum fit ... Quæritur autem an sit Arithmetica vel Geometrica? R. Geometrica, quia linea lateralis non longitudinem, sed potentiam Geometrice inventam vel cognitam exprimit. Constat enim ex Geometricis quemadmodum diagonium quadrati sui potest duplum, ita semidiagonium quadrati sui posse dimidium, cujus radix ad quadrati latus est asymmetra. Jam si more Archimedes omnibusq; Geometris hactenus usitato, hanc fractionem potentialem seu Geometricam $\frac{1}{2}$ per se ipsam multiplices, ut quadratum illius in numeris assequaris, toto quod aiunt cælo aberrabis, & pro semisse, quem hypothesis nostra requirit, habebis merum quadrantem, numerum scilicet dimidio minorem.

Exemplum sumamus aliud. Objiciatur quadratum lateris ad simplicem dimensionem sesquipedale, quod sic $\frac{3}{2}$ notari solet. Multiplicatis invicem lateribus numerum procreamus $2\frac{1}{4}$, qui totius areæ quantitatem vere ostendit: cum fractio unitati adhærens sit Arithmetica ut ex iis quæ antea diximus, facile colligere licet.

Rursus obiiciatur quadratum aliud pedibus constans duobus cum dimidio. Hujus radicem si inquiras, deprehendes unitatem cum residuo sesquipedali. Hinc Geometrica fractio ad unitatem adjacens advenit $\frac{1}{2}$ h.e. est in numeris minimis $\frac{1}{2}$ ut radix ista scribenda sit in modum hunc $1\frac{1}{2}$, quæ utrobique plane eadem est ut in exemplo proxime præcedenti, sed hic Geometrica, illic Arithmetica. Sequitur & hic pro inveniendo area lateris seu radice per se multiplicatur an pedibus area quæsita? nequaquam, sed tantum $2\frac{1}{4}$ cum tamen hypothesis $2\frac{1}{2}$ requirat.

Videm

Videamus etiam exemplum tertium. Ponatur quadratum probabile 22. Hinc radix extracta erit 4 cum residuo 6/9 seu 2/3 quae fractio cum numero superiore conjuncta hanc radicem 4 2/3 suppeditat plenam. Fractio autem hoc ipso 2/3 numero integro 4 apposita, est Geometrica; quippe post radicem extractam in residuo relicta. Jam si Arithmeticae vestigia sequens radicem ad fi[illegible] multiplices per se ipsa, [illegible] & plane [illegible] numerum longe diversum atque alienum. Denique hac periculum hujus rei per exempla infinita [illegible] semper [illegible] quam in istis superioribus ad oculum evidentissime ostendimus.

DEMONSTRATIO RELIquorum discriminum.

Hactenus ipsa res evidentia in exemplis nostris manifesta fecit confirmavit: fractiones Geometricas multiplicandas non esse: quae in re tota nostram consistit; reliqua differentia superius accumulata ad eandem pertinent, causasque hujus aperiunt: de quibus nunc porro despiciendum.



Est area quadrati A E, latus A O quatuor aequalibus partibus dimensionem simplicem distinctum 1. 2. 3. 4. Harum tres priores singulae singulas fractiones suppeditant Arithmeticas bases $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ hoc est $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{4}$; quarta vero pars $\frac{4}{4}$ integrum ipsum absolvit. Symmetria inter has partes ex aequali ipsarum distantia facile apparet. Eadem symmetria harum partium cum sua tota (nempe cum mensura pedali, cui tanquam partes subsunt) hinc colligitur, quod

quod partes æquali distantia ubiq; continuatæ, tandem eodem cum ipsa mensura puncto nimirum in signo O, seu 4, præcise terminantur.

Iam vero & aream ipsam in quatuor easdem partes Geometricas distinximus, quarum prima A B continet $\frac{1}{4}$ altera A C $\frac{2}{4}$ seu dimidium, tertia A D $\frac{3}{4}$ ultima A E $\frac{4}{4}$ hoc est integrum. Distinctio hæc fundamento [illegible] propositionis pen. lib. 1. Elem. Eucl. Estq; areæ A C latus [illegible] agonio areæ A B, latus porro areæ A D æquale spacio seu lineæ rectæ (quam tamen non expressimus, sed mente concipiendam reliquimus) inter P Y angulum rectum P A Y subtendenti.

Latus deniq; totius areæ ad mensuram pedalem convenit, neq; fieri potest ut ulla Arithmetica ratione hæc partium Geometrica distinctio perficiatur. Obstat enim, quod area tum A C tum A D radices habent in numeris omnino surdas, solaq; linea Geometrica artificio, ut & ante monuimus, demonstrabiles.

Iam quod ad latera harum Geometricarum particularum attinet, esse hæc & inter sese, & cum lateribus partium Arithmeticarum, quas numeris 1. 2. 3. 4. notavimus, asymmetra, hoc est, nullam communem mensuram non admittere, partim ipsi memorati radicum numeri surdi, partim ipsa diagrammatis nostri inspectio, partim etiam Aristotelem testimonium confirmat, qui diagonium quadrati & latus, quæ hic concurrunt & miscentur, adeo esse asymmetra, sæpe repetit. Quin eadem ratio asymmetriæ in comparatione dictarum partium cum suo toto occurrit. Primum enim latus A Y quarta pars areæ totius non etiam est quarta pars lateris A O totius, sed dimidia. Deinde, si linea A Y quater pars longitudine continuetur, non eodem puncto cum latere A O terminabitur, sed in punctum longitudine dupla N procurret.

Iam ex hoc fonte constat etiam illud emanat, de quo inter differentias superiores ante meminimus, scilicet fractiones Arithmeticas partes occupare in radice quidem æquales, in area vero inæquales; Geometricas contra, partes in radice inæquales, in area vero æquales. Repetamus enim figuram præcedentem, sitq; A E area pedalis quadrata, cuius latus A O quatuor partibus 1. 2. 3. 4. Arithmetice ac propterea æqualiter distinctum, ita ut ubi numerus 1. apponitur, ibi una quarta lateris finis intelligatur, ubi pars spacio 2. ubi $\frac{1}{2}$ hoc est dimidium, ubi iterum pars spacio 3, ibi $\frac{3}{4}$ ubi 4. ibi inte-

grum

gram. Hic vero [illegible] quarta [illegible] A. 1. comprehensum, ut quae pedi $\frac{1}{4}$. Latus verò linea A. 2. est ipsius radicis duplum longitudine; non autem eadem potentia sed quadruplum: at porrò radix seu linea, A. 3. est prima illius A. 1. longitudine triplum: potentia verò non triplum, sed ter triplum. &c.

In Geometricis verò distinctione omnia in contrarium eveniunt. Nam A. B. est area totius pedalis per quadrata; A. C. dimidia eius, et sic dupla ipsius A. B. utque rectangulum D. C. aequale est quadrato A. B. quae tamen singula valde imparia spatiorum radice obtinent: quod adeo sua luce manifestum est, ut nullam amplius demonstrationem requirat: quod idem et de reliquis rectangulis [illegible] intelligere licet.

Apparet et illud in diagrammate superiore, habitis his quae exposuimus, Geometricas partes quantitas sua directe et per se [illegible] re, nec ullius alterius operationis [illegible] ad potentiam [illegible] plicanda indigere. Sic enim area A. B. ut est quarta pars pedis quadrati, ita fractione $\frac{1}{4}$ quartam [illegible] partem notatur: ut A. C. est pars dimidia, ita et fractionis hac $\frac{1}{2}$ (qua dimidium notari solet) scribitur: idem etiam de A. D. iudicandum. Arithmeticè contrà non directè, nec per se, sed per multiplicationis tandem ambages, quod [illegible] quadratum [illegible]: unde et numeri [illegible] stant explicandae potentiae gratia [illegible]. Geometrica [illegible] constant numeris ex multiplicatione factis, [illegible] plicatione fieret: si haec radix ad numerum [illegible] minus, quam Arithmetica reduci posset. Ex his autem hoc tandem sequitur [illegible]. Quamvis in minutiis Arithmeticis commode necessariae sint multiplicationes, non tamen in Geometricis locum habere ullum, sed calculum procreare semper fallacem.

APPLICATIO SUPERIORIS dispensationis ad Archimedem.

Non facillima, neque certissima fractionum Geometricarum in eo est posita, si radices non ad aequalem mensuram distinctae, sed ut numero non quadrato rerum intelliguntur, vel sola pro radice extrahenda (quod fit in numeris, quorum radix infra unitatem subsistit) collocentur.

Iam vero eas fractiones, quibus Archimedes in demonstranda proportione circularis peripheriae ad diametrum utitur, non aliunde, quam e radicum in numeris non quadratis extractione provenire, ipsa res evidenter testatur.

Ergo non Arithmeticas, sed Geometricas esse ambigi non potest, unde porro ut consequentia sic infertur: Qui in demonstrationibus calculo utitur semper fallaci, is propositum suum vere & legitime non demonstrat.

Archimedes autem circuli semper fallaci in demonstranda proportione inter circuli perimetrum & diametrum est usus, dum fractiones Geometricas, quas multiplicare non oportet, multiplicationi subjecit.

Ergo proportionem, quae est inter circuli perimetrum & diametrum vere ac legitime non demonstravit.

QUA RATIONE ARITHMETICA,
fractiones Geometricae ad propositum accommodandae.

Cum ergo jam contra Archimedem demonstratum sit, fractiones Geometricas a multiplicatione Arithmetica penitus abhorrere; quaeritur jam non immerito, qua tandem ratione sint tractandae, ut proposito satisfiat? R. Si solae sint, nullam ulteriorem operationem desiderant, sed stante jam aperta prorsus forma, quid possint, ita ostendunt. Sic enim ubi fractio invenitur Geometrica vel $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ vel similis, hic statim intelligitur quadratum seu aream cui nomina subscribit, tantundem posse, nempe vel dimidiam vel tertiam partem vel quartam mensurae illius, cujus respectu fractio, ut modo ostensum est, adhibita est.

Si vero alicui quidam radicali fractionem praecedit numerus integer, cui fractio adhaeret, hic numerus praecedens (fractione interim neglecta) multiplicabitur quadrate, productoque, tandem numerator fractionis adhaerentis simpliciter per additionem Arithmeticam adjicietur, & constabit propositum: nisi forte fractio ad numeros minores sit reducenda, qua de re statim post hujus partis exempla dicemus.

Occurrat igitur exemplum, quare radicis ad modum hunc $1\frac{1}{3}$ fractio, hac adhaerens $\frac{1}{3}$ sit Geometrica: quaeritur, quodnam sit verum

homo-

Digitized by Google

Exempli [gratia] occurrat fractio Geometrica sic notata $4\frac{2}{3}$ numeris diminutis hinc colligo, quod denominator 3 minor est duplo numeri praemissi 4, opus igitur esse restitutione. Ideo duplico 4 qui numerus fractionem hanc praecedit & exurgunt 8, addo unitatem fiunt 9 qui est denominator quaesitus.

Porro, hoc divido per 3, (nempe denominatorem priorem) unde emergunt 3. Hic ductis in numeratorem fractionis propositae, nimirum 2, exurgunt 6, qui est numerator fractionis restitutae.

Rursus offeratur radix alia sic $10\frac{6}{7}$ notata, ubi certe fractio est Geometrica. Numeros fractionis esse in minores resolutos facile intelligo, quia denominator 7, longe abest a duplo 10 quibus [illegible] adhaeret.

Quare ut restituam, reduco decem in duplum, & fiunt 20, quibus adjicio unitatem, ut summa sit 21, qui est denominator restitutus. Porro numerum hunc rursus divido per 7 (qui est denominator fractionis diminutae) ex qua divisione procreantur 3. Hec 3 duco per numeratorem fractionis propositae nimirum per 6 unde procreantur 18, qui est numerator, quem restitui oportebat. Hac restitutione peracta, numerator per additionem ad quadratum radicis fractioni praemissae adjungetur, ut supra monstravimus.

Haec igitur tandem vera legitimaque, & semper constans est operandi ratio in fractionibus Geometricis, quae hactenus illustrium exemplorum inductione (quibus dissimilia non invenimus) confirmavimus.

Hanc eandem operationem confirmant Arithmetici, qui ubi de examine extractae radicis agunt, non jubent residuum cum radice inventa simul multiplicare, sed ipsam radicem separatim multiplicare, tum huic tandem producto residuum addere: quod plane cum nostra sententia congruit.

Caussa vero hujus operationis latet in ipsis fractionum differentiis, quas supra commemoravimus; ubi inter caetera ostendimus, fractiones Geometricas non radicem, nec partem radicis, sed vel aream, vel partem areae, notare. Quamobrem dum numerus quadratus ex radice proposita quaeritur, hic autem numerus, quem fractiones Geometricae insequuntur, est quadratus, vel pertinet non ad radicem sed quadratum, ut diximus: sufficit simplex hujus ubi positio, quoties radix numeris integris non praecedit, vel si praecedit, eaque per multiplicationem prius in quadratum sit ducta, simplex residui additio.

ratis. Alias quadratum eorum multiplicatum in aliam degenerat numerum, qui neque cubus neque quadratum solidum est: non secus, quam si fractiones genitae cum suis integris, una eademque multiplicatione confunduntur, unde neque aurei neque grossi, sed barbara quaedam numerorum chimaera in stirpe plane aliena & abhorrenti nascuntur.

DEMONSTRATIO, QUOD PROPORtio inter perimetrum & diametrum circuli sit tripla sesquiseptima major.

Hactenus falsam Archimedis Arithmeticam refutavimus, eiusque loco veram constituimus: nunc quod in proportione diametri ad perimetrum circularem, in qua laborat mire Archimedes [illegible], vera illa nostra, quam asserimus, [illegible] ostendemus. [illegible] quidem [illegible], sed quantum hic agitur [illegible], ne Archimedis auctoritati premamur, sufficiat. Brevissime [illegible] usui futurum, qui calculum Archimedeum non ignorant.

Nostro igitur calculo per fractionum additionem instituto, in triangulo primo, ubi tertia pars recti, semidiameter E. G. ad latus G. Z. proportionem habet [illegible], quam 265[illegible] ad 153, ubi Archimedes fractionem [illegible] non invenit.



Digitized by Google

Bissectione prima, iterum semidiameter E. G. ad latus G. H. rationem habet propius eandem, quam 571 [illegible] ad 153: ubi Archimedes generaliter ait: majorem rationem habere quam 571. ad 153.

Bissectione altera semidiameter eadem E. G. ad latus G. Q. rationem habet exacte, quam 1162 [illegible] ad 153. ubi iterum Archimedes generaliter ait; majorem rationem habere, quam 1162 $\frac{1}{8}$ ad 153. Hic videtur minor incipit esse semidiameter nostra, quam Archimedis. Nã 153. in 2571 continentur [illegible] & adhuc restant [illegible]. Bissectione tertia iterum G. E. ad G. C. est ut 2334 [illegible] ad 153. ubi Archimedes 2334 $\frac{1}{4}$ ad 153.

Bissectione quarta seu ultima, calculo nostro per additionem facto (ut fieri oportere existimamus) iterum eadem semidiameter E. G. ad latus G. L. est ut 4673 [illegible] ad 153. Hic ultimum ultime si [illegible] numeratore 8 [illegible] in denominatore suo 9247. continetur decies, & adhuc restant 807. unde ratio pro parte undecima quam decima sumi posset; sed ne insistentes nostra blandius videamur, parte decima contenti erimus. Quamobrem ex hypothesi hac semidiameter [illegible] ultima erit 4673 $\frac{1}{10}$ cum haec apud Archimedem est 4673 $\frac{1}{2}$. Jam vero lateribus multanguli circumscripti omnibus conjunctis, seu 96. lateribus per 153. multiplicatis, summa erit nobis, quae Archimedi exurgit 14688, a quibus si primo ter auferatur 4673. id est, diametri numerum integrum remanebunt tam nobis, quam Archimedi 669. Hinc si iterum ter auferatur fractionem nostram $\frac{1}{10}$ remanebunt 668 $\frac{7}{10}$ pro quibus in calculo Archimedes sunt tantum 667 $\frac{1}{2}$. At numerus hic quidem Archimedis non est pars septima diametri sed paulo minor. Multiplicatis enim 667 $\frac{1}{2}$ per 7. procreantur 4672 $\frac{1}{2}$ qui numerus cum sit ad nostram diametrum 4673 $\frac{1}{10}$ minor, igitur minor ad Archimedeam 4673 $\frac{1}{2}$ assurgit. At noster numerus residuus 668 $\frac{7}{10}$ per 7. multiplicatus procreat 4680 $\frac{9}{10}$ qui diametrum tam longe superant sive nostram sive Archimedeam [illegible]. Subtractis enim 4673 $\frac{1}{2}$ hoc est, numero Archimedis restabunt 7 $\frac{2}{5}$. Subtractis autem 4673 $\frac{1}{10}$ hoc est, numero nostro, restabunt 7 $\frac{4}{5}$ qui nobis est [illegible] excessum, quo cir-

[illegible]

tum ſeſquiſeptimam peripheria circuli diametrum ſuam verè ex-
cedit, quod erat hoc loco demonſtrandum.

CONCLUSIO AD THEOREMA Archimedis tertium.

Ex hoc tandem manifeſtum, atq; adeo ex ipſis Archimedis principijs (illis hoc applicatis) ſic concludimus: Si omnis circulus (ut habet primum Archimedis theorema) æqualis eſt trigono orthogonio, cuius quæ [illegible] rectum, æqualis eſt uni earum laterum, quæ circa angulum rectum, perimetro autem baſi. Itemq; ſi omnis circuli perimetros ad diametrum non eſt tripla ſeſquiſeptima minor (ut perperam demonſtravit Archimedes) ſed vere maior, ut proxime ſupra comprobavimus: nemo certe dubitare poteſt, quin ipſa circuli area intra limites Archimedis non conſiſtat.

AD THEOREMA ARCHIMEdis ſecundum.

Quare prius de tertio, quam ſecundo theoremate tractatum ſit, antea patuit. Quoniam vero Arithmetica ſaniore oſtendimus, perimetrum circuli ad diametrum eam proportionem [illegible] quadratum ad diametrum deſcriptum, proportionem [illegible] ut hoc loco legitime demonſtratum ſit ab Archimede. Quod ſi autem ex tetragoniſmo noſtro de hac proportione ſit conſtandum, dicemus hanc quam proxime eandem eſſe, quæ eſt inter [illegible] quod ut plenius intelligamus, ipſe tetragoniſmum noſtrum nuper inventum hic in medio ponimus.

CIRCULI DIVISIO.

Sit Quadrandus circulus A, B, C, D, ex centro E, deſcriptus. Dividatur æqualiter in partes quatuor, binis ſemidiametris ex centro E ad peripheriam protractis, eamq; in punctis A, B, C, D, tangentibus. Diſtinguatur iterum unaquæque ex his quatuor partibus ſemidiametro quadam, etiam ex centro E ad peripheriæ punctum F producta, quemadmodum in figura ſubjecta inter A. B. factum eſt.

Quod

Digitized by Google

Circulus uti omnes in plano figuras pulchritudine, perfectioneque superat; ita membrorum aequalitate ac Symmetria constat omnium exactissimâ, maximeque mirifica.



Quod si placuerit, nihil obstabit, quo minus tres itidem reliquae circuli partes eodem modo subdividantur, unde circuli partes emergent octo aequales.

Ducatur deinde recta ex A in B, quae ubi semidiametrum E. F secabit, ibi notetur G. Similiter ducatur linea altera ex A in F, tertia ex B in H, quarta etiam ex H in I, hac cautione, ut F. G. H. I. E. distantia aequali separentur. His peractis, erit circuli quadrantis pars octava, A. F. E. in membra quinque symmetriâ pulcherrimâ distincta. In medio apparebunt tria majora triangula sibi invicem aequalia. (A. F. G. / A. G. H. / A. H. I.) Extime ad circumferentiam vadabit lunula A. K. F. Sic enim segmentum istud circuli A. K. F. a peripheria & recta comprehensum quamvis forte non sine quadam ἀκυρολογίᾳ tamen emphatice satis nominemus. Intime ad centrum invenietur triangulum quoddam minus A. I. E. ipsi lunulae A. K. F. aequale, ut jam demonstrabitur.

TRI-

PRIMA PROPOSITAE QVADRA- turae demonstratio per collationem & detra- ctionem aequalium.

Cum circuli quadrandi difficultas omnis in lunularum indaganda quadratura consistat, maximam ipsi operi lucem faciemus, si demonstrabimus lunulam illam genuinam A. K. F. B. in praesenti figura expressam triangulo H. I. E. ad centrum descripto aequari. Demonstrabimus autem hoc ipsum dupliciter, primum per collationem & detractionem aequalium, ut reliquum aequale concludendum [illegible] Qui aequalibus aequalia demit, relinquet aequalia: deinde per aequalitatem excessus.

Designata circuli quadrandi figura [illegible] describatur ex eodem centro E. circulus [illegible] Hic descriptus circuli dupli [illegible] quadrandum [illegible] Cum enim duplum [illegible] consistet simplis aequalibus, quorum alterum loco est circulus quadrandus ipse, alterum zona ambiens; erunt hae ipsa, tanquam dimidia eiusdem, inter se aequales. Producantur [illegible] circulo per [illegible] diametris [illegible] circumferentiam [illegible] in punctis L. N. [illegible] P. Q. D. S. erunt quoque [illegible] partes [illegible] inter se aequales.

Ducantur deinde lineae hae, altera L. M. altera L. I. [illegible] spatia tria, videlicet lunula L. T. M. triangulum L. M. I. & spatium L. F. K. A. Ex his duo superiora esse singula membra dupla, [illegible] ratio, proportioque [illegible] Inferius ergo [illegible] ut membra in circulo & zona, pro [illegible] proportionem non [illegible] sed etiam numero ([illegible]) [illegible] enim [illegible] aequalia [illegible] ex [illegible] proportione [illegible]

Ad hunc modum [illegible] circulique aequaliter dispositis, per collationem, detractionemque [illegible] triangulo [illegible] lunulam perveniamus. Pro triangulo igitur zonae duplo, L. M. I. in circulo majore triangula simpla duo

 H. I. G.



A. T. G. / A. G. B. compensatim abijciantur. Pro spacio, L. T. K. M. (atque membro simplo) abijciatur in circulo triangulum, A. H. I. Sic in tantum restabit luna sola, L. T. M. quae ut est membrum duplum, ita etiam pro illa in circulo supersunt membra duo simpla: nimirum lunula A. K. V. & triangulum, E. H. I. Iam cum omne duplum Geometricum simplis duobus exactè aequalibus constet: alterumque simplum lunae huius dupla, L. T. M. in circulo respondeat hic lunula, A. K. V. alterum triangulum E, H. I. Erunt haec ipsa simpla, lunula A. K. V. (inquam) & triangulus E. H. I. exactè aequales: id quod demonstrandum erat.

Postea

Tandem vero post membra duplicia simplicia residuum, hoc ut sin-gula [illegible] in circulo aequali numero comprehenduntur. Qua-tuor enim membra [illegible] inter H. N. tum in lunula, tum in cir-culo [illegible] denotantur [illegible] in praecedenti figura sub litera B. [illegible] Semi-lunula enim, H. F. N. respondebit ad lunulam A. K. F. triangulum, F. [illegible] ad [illegible] sic F. E. N. ad A. [illegible] Sic denique [illegible] ad [illegible]

Neque vero [illegible] sint aequalia [illegible] in figuris proportionalibus non possunt esse membra figurae proportionalia. Nam si proportionalia sint, & sic membra inter se aequalia, utique in proportione simpla, singula singulis; in dupla, singula duobus; in tripla, singula tribus, &c. Ut igitur hoc pro-portionalis divisio [illegible] esse [illegible] tum triangula in circulo simpliciter divisa respondent quadratis [illegible] R. F. G. & A. [illegible] de quo [illegible] triangulo aequalentur, prop-ter ipsam proportionem constituentem dubitari non debet, quamvis nul-lum aliud examen quo idem ostenderetur, in promptu esset: sic nul-lo etiam modo dubitari potest, cum lunula [illegible] sit membrum duplum, quia in circulo proportionaliter distinctio, duobus membris aequalibus exactissime respondeat; quemadmodum cum inter trian-gula majora [illegible] ad lu-nulam A. K. F. & triangulum [illegible] hanc ipsam ob caussam sibi aequari concludamus. [illegible] Tandem sub uncis pariter aequalibus iisdem membris omnibus, quia [illegible] A. F. K. cum residuo circuli triangulo majore [illegible] simplici-ter [illegible] ambigi non potest.

ALTERA DEMONSTRATIO PER *inquisitionem excessus.*

QUod si lunulae A. K. F. vel quod eodem tendit, F. K. E. quanti-tatem per excessum residuorum inquirere libet, quemadmodum iam ante annos bis mille Hippocrates in sua Tetragonismo ingenio-sissime instituit; quamvis recte ac Geometrice perficere nec ille, nec alius quispiam hactenus potuerit, quod tamen vehementer optarunt o-mnes, ac tentarunt plurimi; id in nostra Quadratura facillime conse-quemur hoc modo.

Distinguatur pars zonae circuli, octava, quemadmodum [illegible]
capitis praecedentis sub littera A factum est. Tum ad [illegible]
zonae (F. K. N. B.) lunula, F. K. B. adijciatur: inde proveniet
triangulum, F. B. N. unum ex triangulis circuli maioribus cum ex-
cessu lunulae adiecta continens, omnibusque (ut facile apparet) angulis
lateribusque triangulo A. E. H. aequalis. Deinde si recta ex C. per K.
usque ad O. in linea F. N. producatur, emerget pro augmentatione exces-
su lunulae assumpta triangulus N. O. B. qui cum sit triangulo H. I. B.
aequalis, efficitur necessario lunulam ipsam A. K. F. triangulo huic
H. E. I. aequalem esse; quod demonstrandum erat.



Quo

Quemadmodum in Trapezio [illegible] propositum circuli [illegible] A. K. E. F. [illegible] Heptagonum, A. E. B. [illegible] tamen maior; continens [illegible] praeter duos triangulos [illegible], etiam duo [illegible] quod in iis, quae iam diximus, facile apparet. Sic igitur ratione duplici, eademque simplicissima utraque, [illegible] satis superque demonstratum arbitramur. Si [illegible] quis [illegible], ac demonstrationis [illegible] quandam perspicuitatem amplissimam [illegible] apertam deprehendet, sive circulo quadratum aequalem (ut [illegible]) describere, sive proportione dupla, tripla, quadrupla, &c. augere [illegible] multis [illegible]. [illegible] quod capitibus [illegible] ad demonstrationem [illegible] dare liceat. Norunt [illegible] quin ii, qui [illegible] Geometriae (quae [illegible]) [illegible] fundamentum [illegible] principio [illegible] circuli quadratio multo amplius confirmetur.

RECTANGULUM CIR-
[illegible]

EX demonstratione praecedenti [illegible] maxime duo, primum de constitutione rectanguli circulo aequalis; alterum de circuli area terminis Archimedis excedente. Primum sic habet: Si duae constituantur lineae rectae ad angulum rectum, quarum altera diametro aequalis, altera spatio inter E. H. (quod in primo capite figura satis apparet) minor, id rectangulum complectens circulo est aequale.

Describatur enim quadratum omnibus lateribus diametro aequalibus A. B. C. D. circulum quadrantem includens. Ducatur recta per G. [illegible] quadrantis [illegible] tangens, ipsi A. B. parallela, altera item per H., tertia per centrum E., quarta item & quinta per H. & G. [illegible] omnes modo eodem [illegible] parallela [illegible] utrumque [illegible]. Ducantur etiam lineae duae altera K. F. altera A. L. quae [illegible] ibidem [illegible] efficient. His ita constitutis facile apparet, circuli partem [illegible] quam supra cap. primo

[illegible]

[illegible] majoribus triangulis; lunulaq; et triangulo minore [illegible] mus, totum rectangulo K. Y. G. M. continetur, uno tantum triangulo majore excepto. Primum enim ex triangulis circuli majoribus erit in hoc diagrammate K. F. G. alterum K. O. A. [illegible] quatri[illegible] R. O. A. succedit. At vero triangulum [illegible] aequale est K. M. A. Iam cum rectangulum [illegible] B. N. G. tantundem complectatur, nimirum alteram etiam circuli partem quartam minus uno triangulo majore; efficitur necessario ut tota illa rectilinea A. B. N. M. quartam excesse totius circuli partem, minus triangulis majoribus duobus. Altera ergo circuli pars quarta erit M. N. R. Q. itidem triangulis majoribus duobus exclusis. Idem judicium erit de V. X. Z. Y. idemq; de Y. Z. C. D.

Restabunt igitur illa adhuc triangula majora ex singulis [illegible]



Digitized by Google

[illegible] [illegible] annis, quæ multa [illegible] [illegible] consensu spati-
um Q. R. S. T. complebunt; id quod in triangulo duplo L. F. R. e-
venitur. Quinq; ergo parallelogrammis, quæ commemoravimus, e-
[illegible] a circulo [illegible] triangulis majoribus & minoribus L. eisdemq;
[illegible] consistentia, concluditur. [illegible] vero L. T. X. V. [illegible] re-
dendus; idemq; in circulo demetiendo [illegible]; cujus [illegible]
tum sit spacio E. H. æquale, consequitur necessario, quod capitis hujus
initio est propositum.

ALIUD RECTILINEUM CIRCOLO
æquale ex [illegible] modo [illegible]
[illegible]



Digitized by Google

EST aliud atque circuli dividendi modus, qui non tantum cum eo, qui est initio descriptum, in idem recidit, sed etiam lunulas circum in rectum continuo resolvit, adeoque mirè consensus sui [illegible] ad demonstrationem superiorem aliquid momenti afferre videtur. Hunc [illegible] habet. Dividantur circulus & zona aequaliter in partes [illegible], ut sup. cap. 2. factum; sed in circulo linea A. L. ab [illegible] in zona linea [illegible] in K. M. mittatur. Deinde circino ad spatium [illegible] (quod eodem redit) F. M. hoc est ad latitudinem zonae dimetiatur; alterumque pedem in G. transferre, alter ubi inferius versus [illegible] H. E. inciderit, ubi X. ubi superius inter F. M. ubi Y. notetur. Tum lineis ex A. duabus, altera in X. altera in Y. [illegible] propositum. Pro triangulo circumscripto majore A. M. L. emergit hic A. E. X. pro triangulo minore [illegible] exurgit A. H. X. lunula verò in triangulum A. Y. F. sine ambagibus resolvitur. Reliqua duo triangula majora pristino modo permanent. Sic circulo dissoluto, quid cuique illius membro in zona respondeat non est difficile videre. Inter lineam enim A. Y. & L. M. tria [illegible] triangula [illegible]. Luna igitur suprema L. Y. M. duobus triangulis minoribus (A. H. X. & A. Y. F.) erit adaequata. Hoc [illegible] demonstrationi superiori consentit; ita [illegible] duplo, triplo, quadruplo, adeoque in infinitum [illegible] ac circulum quadraturae propositionem [illegible] resolvit ad angulum.

AREAM CIRCULI TERMI-nis Archimedeis ex-cedere.

TRansiendum nunc ad alteram demonstrationis nostrae partem, de qua supra promisimus; docendumque aream circuli terminis Archimedeis esse majorem. Juxta terminos Archimedis posito circuli diametro pedum septem, erit area paulo minor pedibus 38½. Sed demonstratione nostra superiori evidenter [illegible], non dubitamus asserere circulum [illegible] nequaquam esse pedibus 38½ minorem, sed etiam [illegible] aliquanto majorem.

Exponatur enim hic figura praecedens penultima, fiatque [illegible] gula

gule quaelibet / A. B. M. N. / M. N. R. Q. / V. X. Z. Y. / Y. Z. C. D. / singula septem pedes longa, lata unum. Eiusdemque longitudinis reliqua duo, latitudine vero sesquipedalia. Erit igitur quadratum A. B. C. D. circulum infundens pedum 49. quem numerum scilicet septies septem procreant. Hinc ablato altero ex rectangulis lateribus (quod redundare atque abiiciendum esse, ostendimus) remanebunt reliqua omnia, quae coniunctim pedes 38½ exacte efficient; eaque vera esse eiusmodi circuli area, si latitudo vero anguli abscissi ad sesquipedem extenderetur. Sed hanc sesquipede esse minorem ratione Geometrica constante omnino patet. Si enim ex hypothesi nostra A. G. / G. H. / I. E. / distant singula singulis pedibus, erit E. H. diameter quadrati ex radice pedis simul: unde quadratum descriptum non est maius pedibus duobus.



Quadra-

Quæ [illegible] verò e radice sesquipedali hanc quantitatem quadran-tè pedis excedit (est enim $1\frac{1}{2}$ in ipsa numerum procreant $\frac{1}{4}$) Quia autem cum diameter circuli proponatur pedum septem: linea autem E. H non sesquipedalis, sed diameter integrum pedis quadrati (cujus quadrantem quadrante pedis minus est ei, quod ex radice sesquipedali emergit) cumque hæc ipsa pedis diameter in diametro circulari septem pedum, sæpius quam quater contineatur: consequens est necessarium, rectangulum abjiciendum etiam ultra quatuor pedis quadrantes, id est, ultra pedem integrum minus esse in pedibus, qui in rectangulo septem pedes longo, sesquipede minus lato continerentur: qua ratione area circuli ex diametro pedum septem descripti, pedes triginta novem cum semisse excederet. At verò cum radix excessus quadrantis (de qua jam tractamus) pro numero pedum diametri spargenda sit in particulas seu punctula septem, quarum sesqui sit tribuenda rectangulo abjiciendo: ideoque sesquipunctulis hisce (hoc est $\frac{3}{14}$ de radicula excessus) major sit rectanguli hujus latitudo quam simplex pedis quadrati diameter, erit iterum ab hac punctula aliquid rectangulo abjiciendo restituendum, ut tanto minus in quibus reliquis rectangulis (quibus jam circuli area continetur) remaneat, quanto magis dictis sesquipunctulis rectangulum abjiciendum auctum intelligitur. Quæ exquisitissima numerorum ratio etsi nondum a nobis sit investigata, id tamen satis ex iis, quæ diximus, constare potest, aream circuli, cujus diameter septem continet pedes, terminos Archimedeos, quàmvis vertantur, excedere; id quod erat hoc loco demonstrandum.



Radix autem excessus quadrantis, de qua jam toties meminimus, sic reperietur. Constituantur rectæ duæ ad angulum rectum A. altera A. B. pedem, altera A. D. sesquipedem longa; sed ita ut in hac etiam longitudo prioris lineæ signo C. notata appareat. Tum circino ad puncta B. C. divaricato, alteroque pede in A. constituto, alter in linea C. D. impressus locum E. punctis ostendit, spatiumque inter E. D. excessus est radicalis, quem diximus in septem particulas,

seu

scrupulum punctula, per numerum pedum diametri, spargendum; quorum punctulorum numerus cum semisse ferè, rectangulo abijciendo tribuendum est.

APPLICATIO SUPERIORUM.

Accommodemus iam tandem haec nostra ad scopum propositum, repetita iterum figura superiore. Suprà autem, circulum quadrato sibi circumscripto (cuius latera diametro respondent) aequalem esse, corpori rectangulo Q. R. T. S. vel T. X. V. S. (nulla enim quoad quantitatem inter haec est differentia) ostendimus.



Huius autem recti anguli latitudinem H. E. parte diametri minimè puncto quodam esse longiorem, inde colligitur, quod in quadrato a. o. k. m diagonio a. k. seu, quod idem est, lineæ L. F. hæc distantia H. F. respondeat. Quamobrem si H. E. esset æqualis diametri K. a hoc est lateris A. D parti quintæ, itidem accedente ad diametrum linea a. K. accederet pars sexta, a. c pars septima: omninoq́; quorum partium latus A. D. continet quinq́;, talium diagonius A. C. contineret septem.

Falsum autem hoc posterius. Nam ex latere A. D. in partes quinq́; distributo, quadratum A. B. C. D. est 25. Igitur diagonii A. C. quadratum (quod duplum esse oportet) non erit septies septem, hoc est 49. sed bis 25. hoc est 50. qui numerus Geometricum quadratum ab radice ad numerum surda refert, quo aliud illud ex radice 7. (numerum 49) unitate superatur. Itaq; distantia E. H seu K. K. (sunt enim hæc æqualia) partem lateris A. D quintam tanto superat, ut ipsum latus A. D sive K. α. (nam et hæc æqualia sunt) huic A. K illinc a. C appositis diagonium efficiat totum A. C qui minus plus possit, quam septies septem; qua ratio accuratius (neq; tamen accuratissime) quinta pars est quadrati circuli circumscripti paulo minor centesimâ, ut eandē circuli ad dimetientis quadratum [illegible] parte centesima sit minor quam 4. ad 5 quod hoc loco in quæstione erat positum.

TETRAGONISMUS ARABICUS;
an & quatenus cum Archimedeo consentiat?

Circumfertur inter alios permultos etiam Tetragonismus Circuli secundum Arabes, quem Iohannes Buteo in suo de quadratura circuli libro reiecit olim, ex causis duabus: Primo quod illius nullam demonstrationē invenerit; secundo quod sit extra limites Archimedis. Eundē quoq; Tetragonismū nuper reiecit in Geometricâ practicâ suâ Christophorus Clavius non modō Buteonis illo posteriori argumento repetito, sed & novo quodā suo adiecto. Placet igitur huius verba hoc loco apponere: Quadratura circuli per numeros, ut quam „ Arabes tradiderunt, & quam Iosephus Scaliger in suis Elementis „ Cyclometricis veram esse credit omnino reiicienda est, cum sit extra „ limites Archimedis per quos constat, proportionem circumferentiæ „

ad diametrum minorem esse debere tripla sesquiseptima, majorem vero tripla super decempartiente septuagesimas primas, quod in numeris Archimedis non cernitur. Dicunt enim proportionem circumferentiae ad diametrum esse potentia decuplam: adeo ut si quadratum circumferentiae ponatur 10. quadratum diametri sit 1. quod falsum est. Nam cum radix quadrata numeri 10. sit major quam $3\frac{1}{7}$ quod hujus radicis quadratum sit tantum $9\frac{43}{49}$. Radix autem unitatis sit 1, esset major proportio circumferentiae ad diametrum, quam tripla sesquiseptima: cum tamen secundum Archimedem sit minor.

Nam quia posita diametro 7. circumferentia minor est quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiae minus quam 484. ad 49. & sic quadratum diametri minorem proportionem habet quam decuplam: quippe cum 490 ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur est proportio quadrati circumferentiae ad quadratum diametri quam decupla. Sed [illegible] Clavium; quae cujusmodi sint, consideremus.

Quod igitur attinet ad Iosephum Scaligerum virum toto litterario orbe clarissimum attinet, et quomodo sententiam suam vel exposuerit, vel defenderit, non tam magnopere laboramus. Nostro vero judicio Arabes in suo Tetragonismo ab Archimede non dissentiunt, sed dicta in hoc capite dilucidum facilius retinent & illustrant: quod tamen hac cautione etiam ipso usu ab omnibus probata dictum volumus; vulgo, nequaquam ab Archimede statim recedere, qui inter Circuli perimetrum & diametrum rationem triple sesquiseptimae agnoscunt, modo dissensum suum asperis verbis, vel aliis indiciis simul ipsi non prodant.

Etsi enim Archimedes rationem hanc paulo minorem ponit, tamen id adeo est exiguum, totq; minutiarum molestiis intricatum, ut non tantum vulgo in dimensionibus negligatur, sed & ipse Archimedes ita velle & exemplo suo praeivisse videatur. Qua de re Buteonis ipsius, cujus mentionem ante fecimus, Observationem judiciumq; hic restituere ipsius verbis libet. Sic igitur ait ille hoc lib. 1. de quadratura Circuli ad Theorema Archimedis tertium: Usus propter facilitatem obtinuit, ut ex limite priore (nimirum $3\frac{1}{7}$) statuatur ἐμβαδὸν circulo dato. Et ita velle videtur Archimedes, ex theoremate secundo, ubi dicit; circulum ad id, quod ex dimetiente quadratum

rationem habere, quam 11. ad 14. Nec curavit, sicut verè potuis-
set, ita proponere: Circulus ad id quod ex dimetiente quadratum,
rationem habet minorem, quam 11. ad 14. majorem autem quam 223.
ad 484. Hæc illa: quibus concessis, facile concidit, quod ipse objicit; se
Arabici istius propositi nullam demonstrationem invenisse, cum de-
monstrationes Archimedeæ etiam Arabibus, qui illius vestigia le-
gunt, ut post apparebit, inserviant.

Quod autem tum Buteo tum Clavius radici $3\frac{1}{7}$ minus quadra-
tum quam 10. tribuunt, id facile ex iis quæ supra disputavimus, refel-
litur. Nam fractio $\frac{1}{7}$ numero ternario adjecta, quæ in designand[a]
triplâ sesquiseptimâ utitur Archimedes, cum non sit Arithmetic[a]
sed Geometrica, ut suo loco ostendimus, non est una cum ternario su[o]
numero, cui adhæret, simul multiplicanda: sed solus numerus terna-
rius per se ipsum multiplicabitur primo, unde emergent 9. Dein[de]
huic quadrato 9. dictæ tandem fractionis numerator nempe unitas per
additionem conjungetur, & sic numerus ille Arabicus præcise pro-
creabitur.

Ad secundum Clavii argumentum, quod attinet, non putam[us]
Arabes Circulum per numeros Arithmetice, sed per lineas Geome-
tricè quadrare voluisse. Non enim dicunt, proportionem circumfe-
rentiæ ad diametrum esse numero decuplam, sed potentiâ: cui poten-
tiæ in quadrato exhibendæ, forte nulla Arithmetica per numeros se[d]
tantum Geometrica per lineas, radix præcise aptari potest. Nec ob-
stat, quod decuplæ a numero denario denominatæ mentionem facia[nt].
Quia Geometria passim per numeros, seu adminiculo Arithmeti[cæ]
propositum suum aperit: nec tamen ideo extra cancellos Geometri[cos]
abripi sese patitur. Quamobrem si missa Arithmetica discretione d[i]-
ametrum non sub duarum, trium, pluriumve partium numero, s[ed]
sub unius tantum continua forma pro Arabum sententia Geometri[ce]
consideres, indeq; descriptum ex diametro quadratum decuplo per [li]-
neas augeas; sic illustri diagrammate ob oculos ponetur, quod Arch[i]-
medea tripla sesquiseptima Geometricè requirit: Eritq; sic inter [A]-
rabes & Archimedem consensus summus, qui ex diametro Arit[h]-
meticè discreta (utpote a sententia Arabum aliena) constanter
intra terminos impugnari non potest. Quod si tamen Geometrica[m]
diametri unitatem, Arithmeticè discernere libeat, meminerit q[ue]

adinvenda radices infallibilibus Geometricis superiores qualibet sunt inferioribus suo ordine & proportionaliter minores, ita semper aliquid a numero per decem multiplicato esse proportionaliter subtrahendum; idq; in nostro exemplo usq; ad particulam septimam in hunc modum. Diameter pedis unius, potentia quadratum parit 10. pedes planos. Duorum, parit 40. minus 1. Trium, 90. minus 2. Quatuor, 160. minus 3. Quinq; 250. minus 4. Sex 360. minus 5. Septem 490. minus 6. hoc est, 484. qui ipsissimus est numerus, quem tripla sesquiseptima Geometrica etiam Arithmetice requirit, quod erat ostendendum.

COROLLARIA DE CUBO.

I.

Quæritur, An recepta cubi duplicatio per lineas proportionales sit vera? R. Conqueruntur magni sane Geometræ, nondum esse demonstratam: quin etiam ipsas proportionales non pro veris, sed vero proximis agnoscunt.

II.

Quæritur, An recepta cubi triplicatio per diagonium lateris sit vera? R. Hæc videtur falsa.

III.

Quæritur igitur; Possitne nostro adhuc seculo, vel alterutra vel utraq; vera certaq; inveniri? R. Nulla desperandi caussa; modo Geometræ, vel sponte sua, vel magistratuum auctoritate (ut vult Plato de Rep. lib. 7.) incitati, ad gloriosissimæ huius palmæ honores procurrerent.

Correctio erratorum quorundam.

A.2.a.l.2.fœderata. l.14.homines. l.21.adductus. l.22. gratulandū. l.29.adeo. A.2.b.l.18.Academias. l.30.proxime. l.31.filis. A.3.a.l. 20 fruebatur. l.22.Ctesibio. A.3.b.l.7.finali. Taceo. A.4.b.l.3.liberate. l.7.invictus. ad finem plenus versus: Asservasse tuis tandem pergenda triumphis. B.1.b.l.5.quod. B.3.b.l.2.quia ex simplici. l.3.fin. latus. B.4.a.l.16.huius rei. l.18.Esto. l.3.fin.partium. In diagrammate numeri 1.2.3.4. singuli quartam partem in linea A.O. indicabunt æqualibus in istius longitudine spaciis distincti. Ad verticem lineæ A.O notetur N. C.2.b.l.11.expunge 19. l.21.illustrium. C.3.b.l.finali quo supra triplam. D.4.b.l.2. finali omittentur hæc verba: etiam triginta novem. E.2.b.l.11.septies. l.19.circulo. l.20.circulus. l.28. Geometria. E.3.a.l.12.fin.apertis. reliqua lector benevolus per se corrigere dignetur.

Digitized by Google